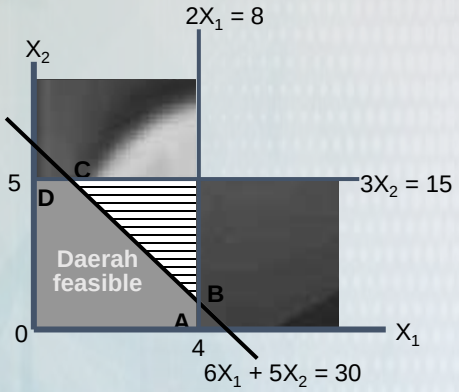
Maximize or Minimize

$Z = f(x,y)$

Subject to:

$g(x,y) = c$



Zulkifli Alamsyah

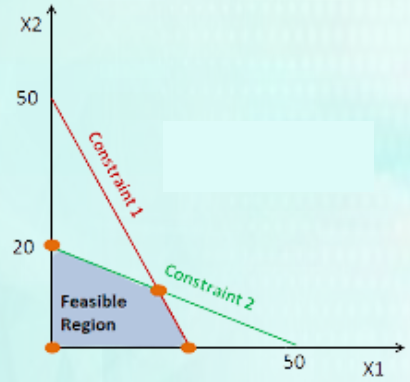
RISET OPERASIONAL
(OPERATION RESEARCH)

Pengampu:

Prof. Dr. Ir. Zulkifli Alamsyah, M.Sc.
Riri Oktari Ulma, S.P, M.Si.

PROGRAM STUDI AGRIBISNIS
FAKULTAS PERTANIAN UNIVERSITAS JAMBI

LINEAR PROGRAMMING



Bagian 1:

- Pengertian dan karakteristik
- Struktur Model Matematika
- Contoh Kasus dan Perumusan model
- Metode penyelesaian secara grafik.

Pengertian, Karakteristik dan Contoh Masalah

Prinsip:

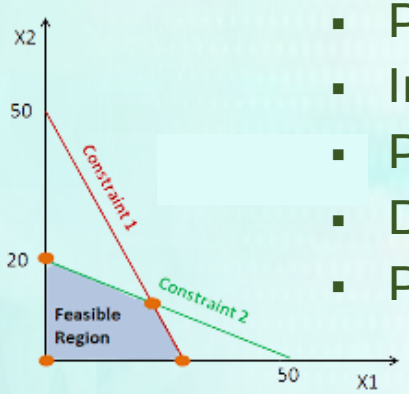
Setiap Organisasi berusaha mencapai tujuan yang telah ditetapkan sesuai dengan keterbatasan sumberdaya.

Pengertian:

Linear Programming (LP) merupakan teknik pengambilan keputusan dalam permasalahan yang berhubungan dgn pengalokasian sumberdaya secara optimal.

Penerapan: Pengalokasian Sumberdaya

- Perbankan: portofolio investasi
- Periklanan
- Industri manufaktur: Penggunaan mesin – kapasitas produksi
- Pengaturan komposisi bahan makanan
- Distribusi dan pengangkutan
- Penugasan karyawan



Karakteristik Persoalan LP:

- Ada tujuan yang ingin dicapai
- Tersedia beberapa alternatif untuk mencapai tujuan
- Sumberdaya dalam keadaan terbatas
- Dapat dirumuskan dalam bentuk matematika→ (persamaan/ketidaksamaan)

Contoh pernyataan ketidaksamaan:

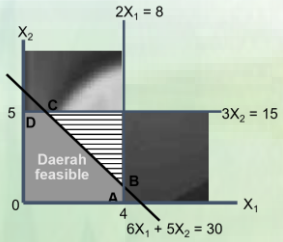
Untuk menghasilkan sejumlah meja dan kursi secara optimal, total biaya yang dikeluarkan tidak boleh lebih dari dana yang tersedia.

Pernyataan bersifat normatif

- Pernyataan diatas harus dapat diubah menjadi model matematika.
- Jika biaya untuk menghasilkan per unit Meja (disimbolkan X_1) adalah Rp200.000 dan biaya untuk menghasilkan per unit Kursi (disimbolkan X_2) adalah Rp150.000, serta dana (modal) yang tersedia adalah Rp3.000.000, maka:

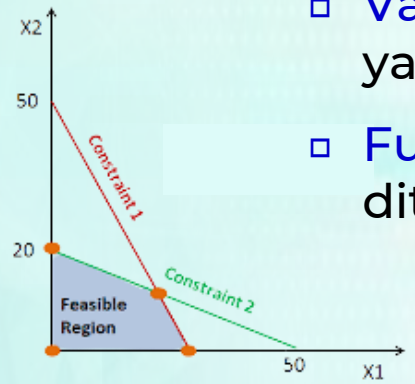
rumusan model matematika dapat ditulis : $200.000\ X_1 + 150.000\ X_2 \leq 3.000.000$

Atau disederhanakan menjadi : $20\ X_1 + 15\ X_2 \leq 300$

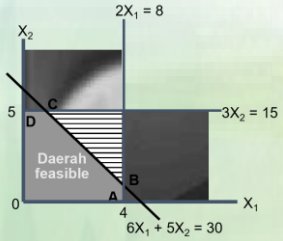


Struktur Model Matematika Linear Programming (LP)

- Model matematika melambangkan situasi kehidupan nyata dengan simbol-simbol matematika.
- Variabel dalam model menunjukkan alternatif keputusan atau suatu kegiatan yang dapat divariasikan dalam situasi kehidupan nyata.
- LP menggunakan model matematika deterministik, dimana semua parameter dalam model diketahui secara pasti.
- Model deterministik akan selalu menghasilkan himpunan (kombinasi) output yang sama pada kombinasi input tertentu.
- Terdapat **4 komponen dasar** dalam model matematika LP, yaitu:
  - Variabel keputusan (*decision variables)* adalah variabel (aktivitas ekonomi) yang nilainya akan dicari untuk memperoleh solusi yang optimal)
  - Fungsi tujuan (*objective function)* adalah ukuran efektifitas dari model yang ditentukan oleh nilai-nilai dari variabel keputusan.

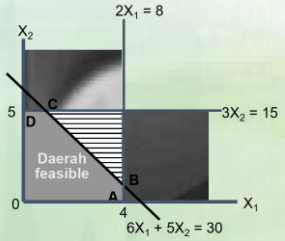


- Terdapat 4 komponen dasar dalam model matematika LP ...lanjutan
  - Parameter adalah koefisien variabel yang nilainya diketahui secara pasti, baik pada fungsi tujuan maupun fungsi kendala.
  - Kendala adalah semua keterbatasan, hambatan atau aturan yang perlu dipertimbangkan dalam pengambilan keputusan yang diterjemahkan kedalam model matematika.
- Model LP adalah alat untuk menemukan nilai variabel-variabel keputusan yang memaksimalkan atau meminimalkan fungsi tujuan dan memenuhi semua kendala ketidak-samaan dan atau kesamaan.
- Jika keputusan yang akan diambil memaksimalkan fungsi tujuan, maka model yang dibentuk adalah model **maksimisasi,** sedangkan jika keputusan meminimalkan fungsi tujuan maka model yang dibentuk adalah model **minimisasi.**



Asumsi pada Model LP

1. **Proporsionalitas (*Proportionality*)**
   Laju perubahan (*slope*) fungsi tujuan dan persamaan kendala adalah konstan; artinya. kontribusi suatu variabel terhadap fungsi tujuan atau persamaan kendala sebanding dengan nilai variabel tersebut.
2. **Aditifitas (*additivity*)**
   Pernyataan pada fungsi tjuan dan persaman kendala harus bersifat aditif (penambahan) Kontribusi suatu variabel terhadap fungsi tujuan atau persamaan kendala tidak bergantung pada nilai variabel lainnya.
3. **Dapat dibagi (*divisibility*)**
   Variabel keputusan dapat berupa pecahan. Namun, pada kasus tertentu harus berupa bilangan bulat seperti pada model integer programming.
4. **Kepastian (certainty)**
   Asumsi ini disebut juga dengan asumsi deterministik. Ini berarti bahwa semua parameter (semua koefisien dalam fungsi tujuan dan kendala) diketahui dengan pasti.



Model Umum Model LP

Model Maksimisasi:

Fungsi Tujuan: $\text{Max } Z = \sum c_j X_j$

Dengan kendala:

$$\sum a_{ij} X_j \leq b_i$$

$$X_j \geq 0$$

Dimana:

X_j adalah variabel keputusan/alternatif ekonomi ke-j

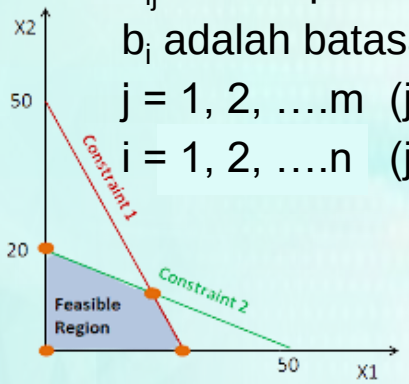
c_j adalah parameter variabel keputusan X ke-j

a_{ij} adalah parameter variabel X ke-j pada kendala ke-i

b_i adalah batasan/ketersediaan pd kendala ke-i

j = 1, 2, ….m (jumlah variabel keputusan)

i = 1, 2, ….n (jumlah fungsi kendala)



Model Minimisasi:

Fungsi Tujuan: $\text{Min } W = \sum b_j Y_j$

Dengan kendala:

$$\sum a_{ij} Y_j \geq c_i$$

$$Y_j \geq 0$$

Dimana:

Y_j adalah variabel keputusan/alternatif ekonomi ke-j

b_j adalah parameter variabel keputusan Y ke-j

a_{ij} adalah parameter variabel Y ke-j pada kendala ke-i

c_i adalah kendala/target pd kendala ke-i

j = 1, 2, ….m (jumlah variabel keputusan)

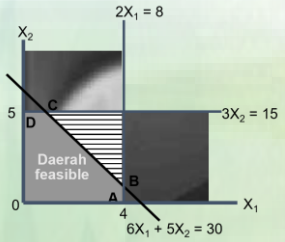
i = 1, 2, ….n (jumlah fungsi kendala)

Contoh Kasus #1 : Industri Meubel

Suatu perusahaan menghasilkan dua produk, meja dan kursi yang diproses melalui dua bagian fungsi: perakitan dan pemolesan.

Pada bagian perakitan tersedia 60 jam kerja, sedangkan pada bagian pemolesan hanya 48 jam kerja. Utk menghasilkan 1 meja diperlukan 4 jam kerja perakitan dan 2 jam kerja pemolesan, sedangkan utk menghasilkan 1 kursi diperlukan 2 jam kerja perakitan dan 4 jam kerja pemolesan,

Jika laba untuk setiap meja dan kursi yang dihasilkan masing2 Rp. 80.000 dan Rp. 60.000, maka berapa jumlah meja dan kursi yang optimal dihasilkan?



Contoh Kasus #2 : USAHATANI PAK TRIMAN

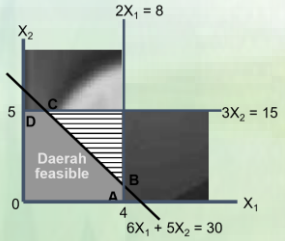
Pak Triman ingin mengusahakan dua cabang usahatani (jenis tanaman) di lahannya seluas 20 tumbuk (1 tumbuk = 100 m2) yaitu Jagung dan Kedelai. Selain kebutuhannya terhadap lahan, kedua cabang usahatani tersebut membutuhkan tenaga kerja dan modal operasional untuk membeli sarana produksi seperti benih, pupuk serta obat-obatan.

Tenaga kerja yang tersedia pada keluarga pak Triman sebanyak 75 jam kerja per minggu, dan modal yang tersedia sebanyak Rp. 3.000.000.

Kebutuhan tenaga kerja per minggu dan kebutuhan modal untuk masing-masing cabang usahatani dalam satu tumbuk usahatani disajikan pada tabel berikut:

Tabel 1: Kebutuhan sumberdaya pada cabang usahatani Jagung dan Kedelai.

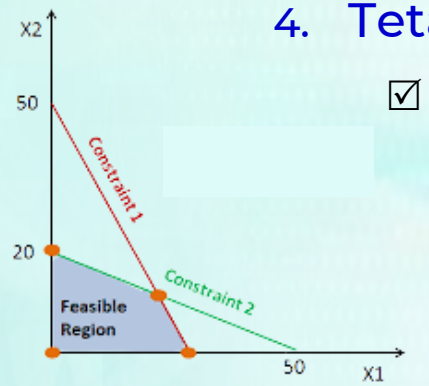
Cabang Usahatani	Kebutuhan Sumberdaya	
	Tenaga kerja (jam/mg/100m^2)	Modal (Rp.100.000/100m^2)
Jagung	3,75	2
Kedelai	5	1



Jika keuntungan per tumbuk dari masing-masing cabang usahatani adalah Rp.100.000 untuk jagung dan Rp.120.000 untuk kedelai, maka berapa luas lahan yang akan diusahakan untuk setiap cabang usahatani tersebut agar Pak Triman memperoleh keuntungan yang maksimum? (BK01.ltx)

Langkah-langkah Perumusan Model

1. Definisikan Variabel Keputusan (Decision Variable)
   - ☑ Variabel yang nilainya akan dicari
2. Rumuskan Fungsi Tujuan
   - ☑ Maksimisasi atau Minimisasi
   - ☑ Tentukan koefisien dari variabel keputusan
3. Rumuskan Fungsi Kendala
   - ☑ Tentukan kebutuhan sumberdaya utk masing-masing peubah keputusan.
   - ☑ Tentukan jumlah ketersediaan sumberdaya sbg pembatas.
4. Tetapkan kendala non-negatif
   - ☑ Setiap keputusan (kuantitatif) yang diambil tidak boleh mempunyai nilai negatif.



Perumusan Model - Kasus #1.

Penyederhanaan kasus dalam bentuk tabel

Proses	Waktu yang dibutuhkan per unit		Total jam tersedia
	Meja	Kursi	
Perakitan	4	2	60
Pemolesan	2	4	48
Laba/unit	80.000	60.000	

1. Definisi variabel keputusan:

Keputusan yg akan diambil adlh berapakah jumlah meja dan kursi yang akan dihasilkan. Jika meja disimbolkan dengan M dan kursi dengan K, maka definisi variabel keputusan:

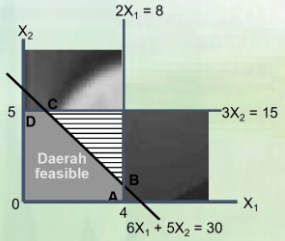
M = jumlah meja yg akan dihasilkan (dlm satuan unit)

K = jumlah kursi yg akan dihasilkan (dlm satuan unit)

2. Perumusan fungsi tujuan:

Laba utk setiap meja dan kursi yg dihasilkan masing2 Rp. 80.000 dan Rp. 60.000. Tujuan perusahaan adlh utk memaksimumkan laba dari sejumlah meja dan kursi yg dihasilkan. Dengan demikian, fungsi tujuan dpt ditulis:

Maks.: Laba = 8 M + 6 K (dlm satuan Rp.10. 000)



3. Perumusan Fungsi Kendala:

(1) Kendala pada proses perakitan:

Untuk menghasilkan 1 unit meja diperlukan waktu 4 jam dan untuk menghasilkan 1 unit kursi diperlukan waktu 2 jam pada proses perakitan. Sedangkan waktu (jam kerja) yang tersedia adalah 60 jam.

Fungsi kendala : $4M + 2K \leq 60$

(2) Kendala pada proses pemolesan:

Untuk menghasilkan 1 unit meja diperlukan waktu 2 jam dan untuk menghasilkan 1 unit kursi diperlukan waktu 4 jam pada proses pemolesan. Sedangkan waktu (jam kerja) yang tersedia adalah 48 jam.

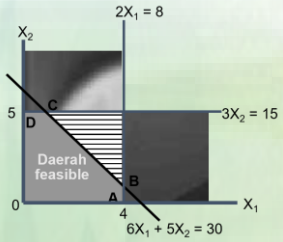
Fungsi kendala : $2M + 4K \leq 48$

(3) Kendala non-negatif:

Meja dan kursi yg dihasilkan tidak negatif.

$M \geq 0$

$K \geq 0$



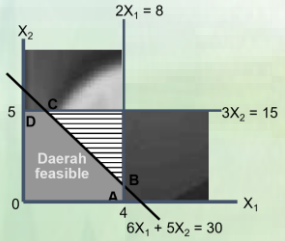
Model LP dari contoh Kasus #1 dapat dituliskan secara lengkap sebagai berikut:

Maks.: Laba = 8 M + 6 K (dalam satuan Rp.10. 000)

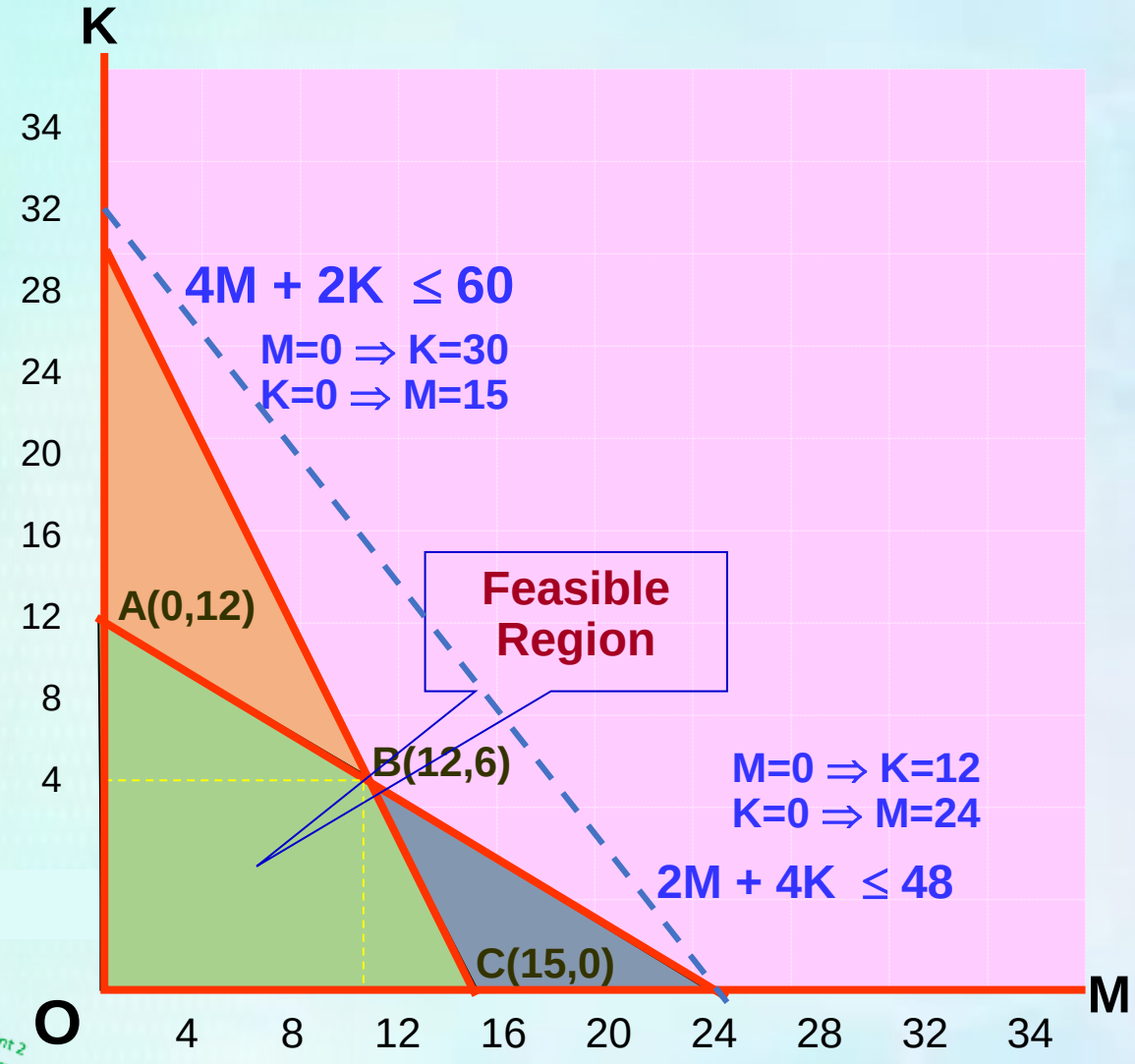
Dengan kendala:

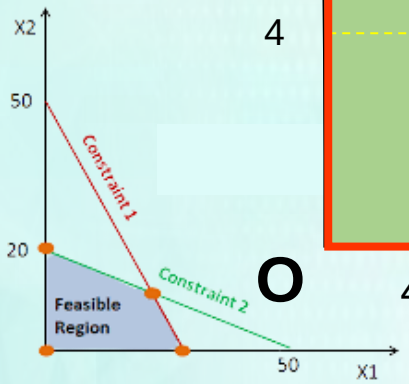
$$4M + 2K \leq 60$$
$$2M + 4K \leq 48$$
$$M \geq 0$$
$$K \geq 0$$

- Model diatas sudah memenuhi asumsi-asumsi dari mode LP yaitu (1) proporsionalitas, (2) aditif, (3) divisibilitas, dan (4) deterministik. Oleh karena itu, model diatas dapat diselesaikan dengan Teknik Penyelesaian Model LP.
- Terdapat 2 (dua) teknik penyelesaian model LP yaitu:
  - Penyelesaian dengan metode grafik (khusus untuk 2 variabel keputusan)
  - Penyelesaian dengan metode simpleks



Penyelesaian Model LP Secara Grafik





- Penyelesaian secara grafik dilakukan dengan cara menggambarkan setiap fungsi kendala pada grafik yang sama.
- Tentukan daerah yang memenuhi semua fungsi kendala → **feasible region** (daerah kelayakan)
- Hitung nilai fungsi tujuan pada setiap titik ekstrim pada daerah kelayakan → A, B dan C
- Nilai Fungsi Tujuan tertinggi memberikan solusi yang optimal.

Laba: Z = 8M + 6K (Rp10.000)

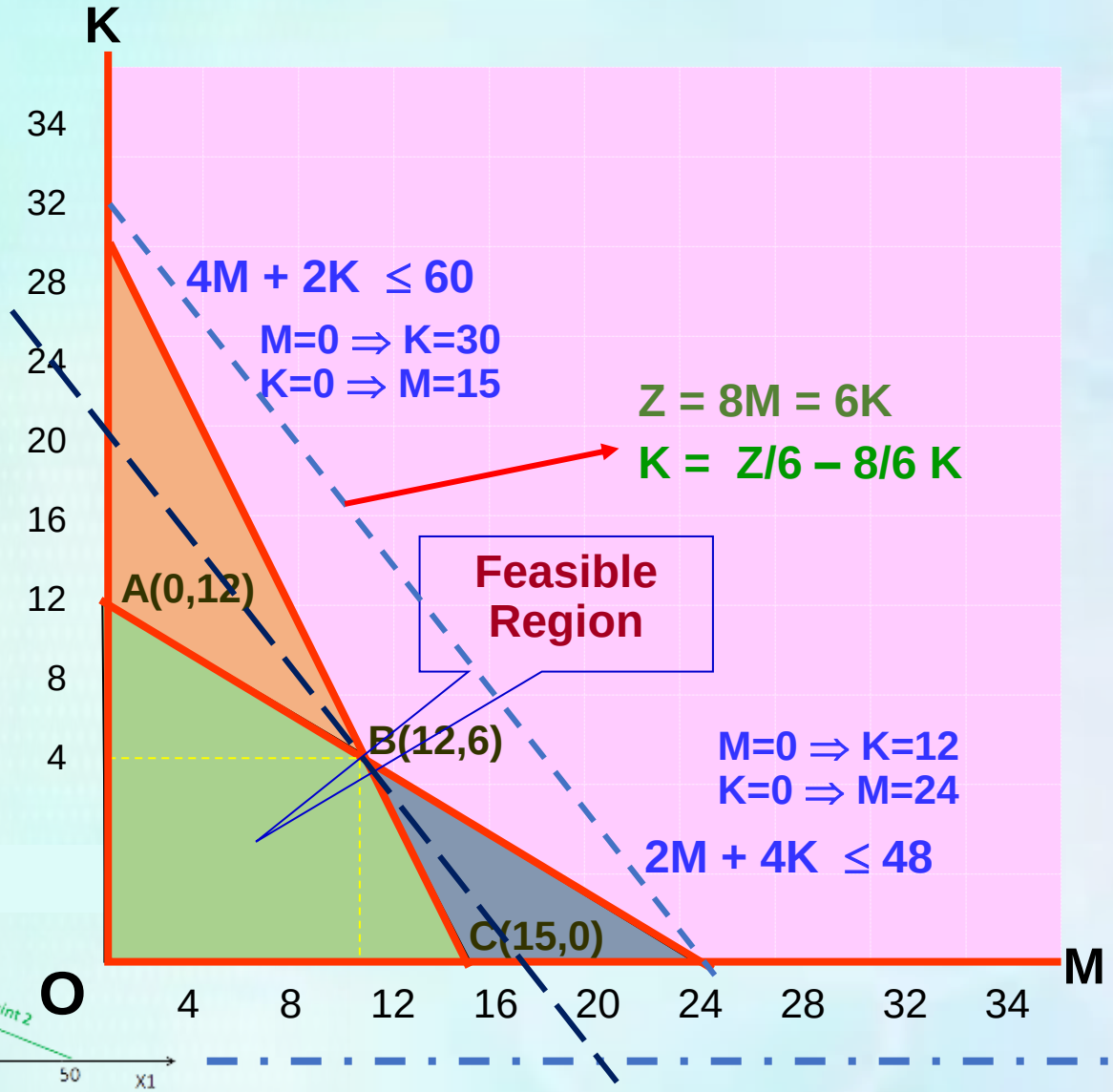
Pada A: M = 0, K = 12
Laba = 6 (12) = 72

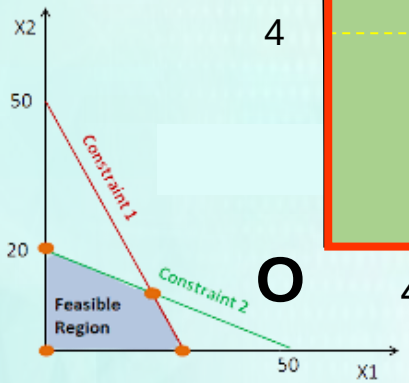
Pada B: M = 12, K = 6
Laba = 8(12) + 6(6) = 132

Pada C: M = 15, K = 0
Laba = 8 (15) = 120

Keputusan:
M = 12 dan K = 6
Laba yg diperoleh = Rp 1.320.000,-

Penyelesaian Model LP Secara Grafik





- Penentuan titik optimal juga dapat dilakukan dengan menggunakan garis fungsi tujuan dengan slope sebesar (koefisien M/koefisien K) yaitu -8/6 pada sembarang nilai Z.
- Garis fungsi tujuan yang terbentuk digeser secara paralel hingga menyentuh titik terluar (*extreme point*) dari daerah kelayakan (feasible region) untuk mendapatkan titik optimal
- Titik optimal yang diperoleh adalah titik B dengan Solusi optimal M = 12 dan K = 6 serta laba yg diperoleh = Rp 1.320.000,-

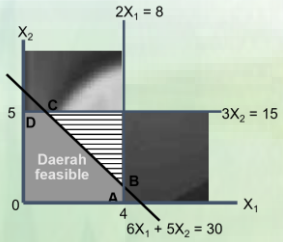
Kasus 3: Industri Olahan Nenas

Agrinas adalah agroindustry yang mengolah buah nenas menjadi selai nenas dan dodol nenas. Bahan baku utk kedua produk tersebut adalah buah nenas, gula dan tepung terigu. Jumlah bahan baku yang tersedia pada Agrinas pada setiap periode produksi adalah 110 kg nenas, 20 kg gula dan 25 kg tepung. Kebutuhan masing2 produk terhadap bahan baku pada setiap proses produksi adalah sebagai berikut:

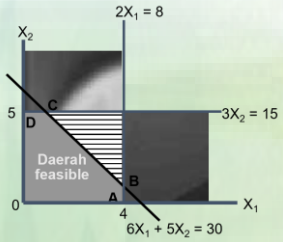
Jenis Produk	Kebutuhan bahan baku per kg produk (kg)		
	Nenas	Gula	Tepung
Selai Nenas	0.35	0.60	0.25
Dodol Nenas	0.30	0.40	0.40

Secara rata-rata, keuntungan yang diperoleh dari selai nenas adalah Rp30.000/kg dan dodol nenas adalah Rp20.000/kg. Kebijakan produksi dari Agrinas adalah jumlah selai nenas yang dihasilkan paling kurang dua kali lebih banyak dari dodol nenas.

1) Rumuskanlah persoalan diatas kedalam model Linear Programming.
2) Carilah solusinya secara grafik.



Terima kasih

zalamsyah@unja.ac.id

Jika ada pertanyaan terkait materi yang disampaikan, dapat diajukan melalui kanal yang tersedia atau melalui forum diskusi pada setiap jadwal kuliah