EKONOMETRIKA

MODEL REGRESI LINIER BERGANDA
Estimasi dan Interpretasi Hasil Estimasi

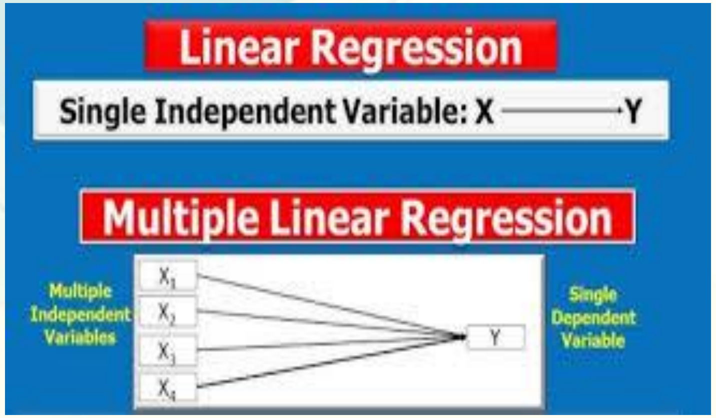
DOSEN PENGASUH:

Prof. Dr. Ir. ZULKIFLI ALAMSYAH, M.Sc.

PROGRAM STUDI AGRIBISNIS
FAKULTAS PERTANIAN UNIVERSITAS JAMBI

MODEL REGRESSI LINIER BERGANDA

(Multiple Linear Regression)



Regresi linier berganda merupakan teknik statistik yang digunakan untuk memprediksi hasil suatu variabel berdasarkan nilai dua variabel atau lebih..

Model memperlihatkan hubungan antara satu variabel terikat (dependent variable) dgn **beberapa** variabel bebas (independent variables).

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + \mu_i$$

dimana: i = 1, 2, 3, …. N (banyaknya pengamatan)

β_0, β_1, β_2, …, β_k adalah parameter yang nilainya diduga melalui model:

$$Y_i = b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} + \ldots + b_k X_{ki} + e_i$$

dan hasil pendugaannya adalah

$$\hat{Y}_i = b_0 + b_1X_{1i} + b_2X_{2i} + \ldots + b_kX_{ki}$$

Estimasi Parameter Model Regresi Linier Berganda

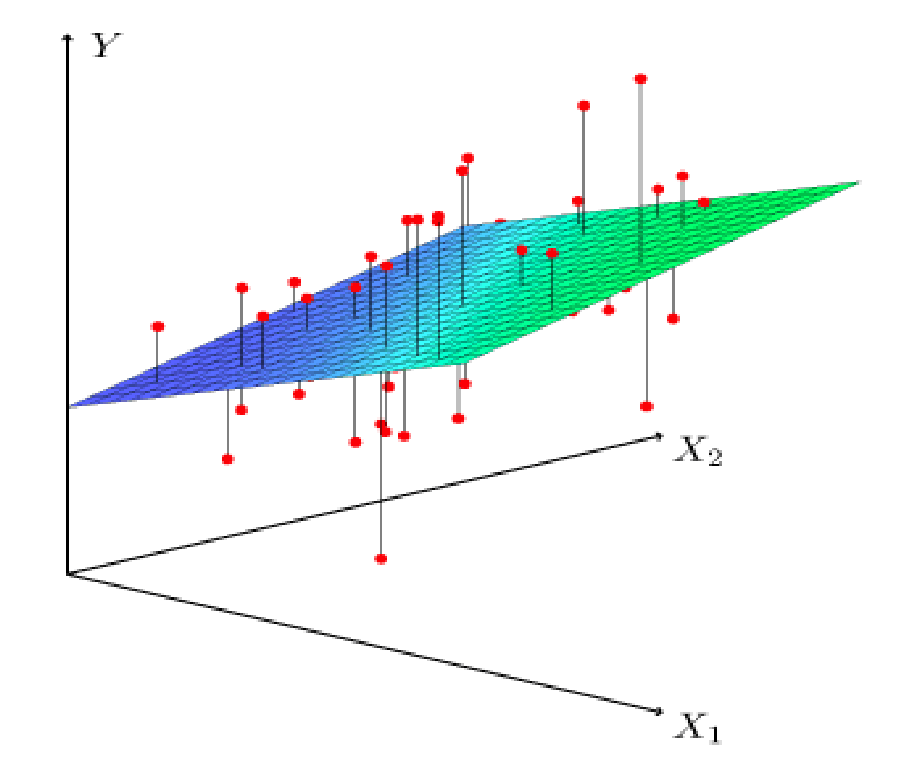
- Estimasi pada model Regresi Liner Berganda bertujuan untuk mendapatkan nilai parameter (konstanta/intersep dan koefisien regresi dari setiap variabel independen dalam model berdasarkan data empiris..
- Perhatikan Kembali model Regresi Liner Berganda

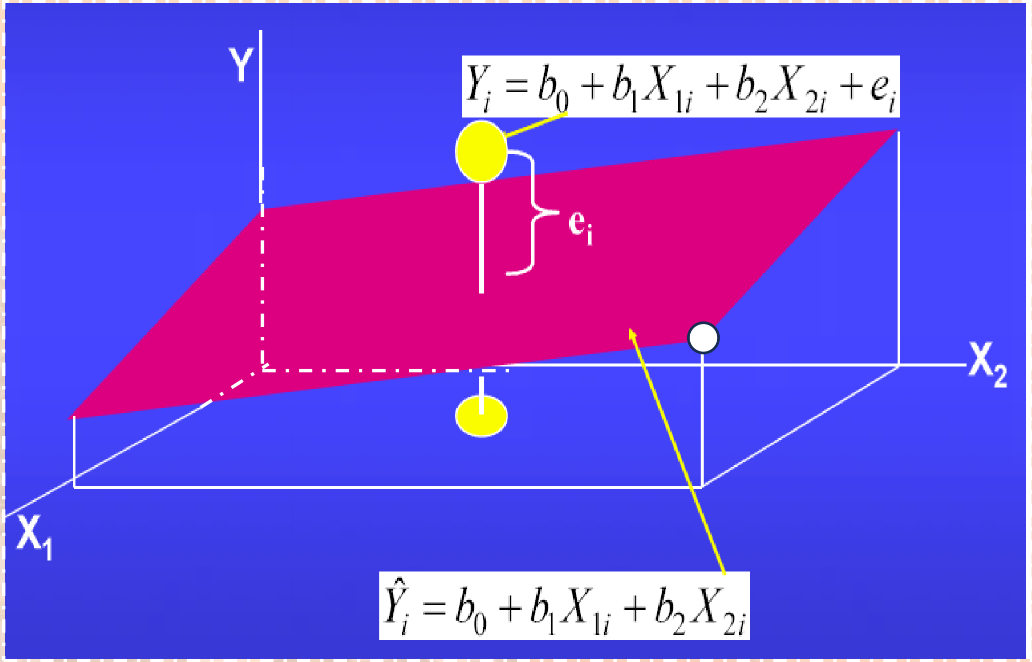
$$Y_i = b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} + \ldots + b_k X_{ki} + \mu_i$$

b_0 adalah intersep, b_1, b_2 dan b_k adalah parameter penduga untuk populasi

- Metode estimasi yang digunakan adalah metode kuadrat (*Ordinary Least Square,* OLS). Metode OLS bertujuan meminimumkan jumlah kuadrat terkecil dari error (μ_i)

PENDUGAAN vs HASIL PENDUGAAN SAMPEL





Pengujian Parameter

Pengujian parameter pada Model RLB bertujuan untuk:

- Mengevaluasi ketepatan (goodness of fit) model
- Menguji ada atau tidaknya pengaruh variabel independen terhadap variabel dependen (**Uji Parsial**)

Evaluasi Ketepatan Model

(a) Koefisien Determinasi

(b) Pengujian parameter secara simultan

Koefisien Determinasi

- Koefisien determinasi (R^2) adalah ukuran statistik yang menunjukkan seberapa baik variabel independen dalam model mampu menjelaskan variasi dari variabel dependen
- R^2 berkisar antara 0 hingga 1, di mana semakin tinggi nilainya, menunjukkan bahwa model dapat menjelaskan variabilitas data dengan baik,

Pengujian parameter secara simultan

Prosedur pengujian parameter secara simultan adalah sebagai berikut:

- Rumusan hipotesis statistik:

  Ho : $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k = 0$ atau $\beta_i = 0$
  Ha : $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k \neq 0$ atau $\beta_i \neq 0$

- Tentukan Tingkat Signifikansi (α)

  Tingkat signifikansi yang umum digunakan dalam penelitian adalah α = 5% = 0.05

- Alat uji statistik yang digunakan:

$$F = SSR / SSE$$

  SSR = sum of square regression
  SSE = sum of square error/residual

Pengujian Secara Simultan (... lanjutan)

- Penentuan daerah kritis (Penolakan Ho)
  - Menggunakan nilai F-tabel. Jika F-hitung > F-tabel → Tolak Ho
  - Menggunakan nilai Signikansi hasil estimasi. Jika nilai Sig < 0.05 → Tolak Ho
- Penarikan Kesimpulan

  Jika Ho ditolak maka disimpulkan bahwa variabel bebas secara simultan (serentak, simultan) berpengaruh signifikan (nyata) terhadap variabel terikat.

Hubungan Uji F dan koefisien determinasi (R^2)

- Uji F secara tidak langsung juga menguji koefisien determinasi (R^2)
- Uji F membandingkan variabilitas yang dijelaskan oleh model (dari regresi) dengan variabilitas yang tidak dijelaskan (error atau residual).
- Karena R^2 mengukur proporsi variasi variabel dependen yang dijelaskan oleh variabel independen, maka uji F bisa dianggap sebagai uji signifikansi terhadap R^2.
- Uji F dihitung dengan rumus:

$$F = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)}$$

  di mana: k = jumlah variabel independent dan n = jumlah total observasi.
- Dari rumus diatas terlihat bahwa jika R^2 besar, maka F-hitung juga besar, yang meningkatkan kemungkinan bahwa model secara keseluruhan signifikan.

Pengujian Secara Parsial

Prosedur pengujian parameter secara parsial adalah sebagai berikut:

- Rumusan hipotesis statistik:

  Ho : $\beta_i = 0$ untuk $i = 1, 2, \ldots k$
  Ha : $\beta_i \neq 0$ atau $\beta_i < 0$ atau $\beta_i > 0$

- Tentukan Tingkat Signifikansi (α)

  Tingkat signifikansi yang umum digunakan dalam penelitian adalah $\alpha = 5\% = 0.05$

- Alat uji statistik yang digunakan:

$$t = b_i / Se_{(bi)}$$

  b_i = koefisien regresi variabel bebas ke-i
  $Se_{(bi)}$ = standard error koefisien regresi variabel bebas ke-i

Zulkifli Alamsyah

Pengujian Secara Parsial (... lanjutan)

- Penentuan daerah kritis (Penolakan Ho)
  - Menggunakan nilai t tabel. Jika t-hitung > t-tabel → Tolak Ho
  - Menggunakan nilai Signikansi hasil estimasi. Jika nilai Sig < 0.05 → Tolak Ho
- Penarikan Kesimpulan

  Jika Ho ditolak maka disimpulkan bahwa variabel bebas secara parsial berpengaruh signifikan (nyata) terhadap variabel terikat.

ESTIMASI DAN PERHITUNGAN SECARA MANUAL MODEL REGRESSI LINIER BERGANDA

Model : $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \mu_i$

Model penduga : $Yi = b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} + e_i$

b_0, b_1 dan b_2 nilai penduga untuk β_0, β_1 dan β_2.

$$b_1 = \frac{(\Sigma y_i x_{1i})(\Sigma x_{2i}^2) - (\Sigma y_i x_{2i})(\Sigma x_{1i} x_{2i})}{(\Sigma x_{1i}^2)(\Sigma x_{2i}^2) - (\Sigma x_{1i} x_{2i})^2}$$

$$b_2 = \frac{(\Sigma y_i x_{2i})(\Sigma x_{1i}^2) - (\Sigma y_i x_{1i})(\Sigma x_{1i} x_{2i})}{(\Sigma x_{1i}^2)(\Sigma x_{2i}^2) - (\Sigma x_{1i} x_{2i})^2}$$

Dimana

$x_{1i} = (X_{1i} - \bar{X}_1)$

$x_{2i} = (X_{2i} - \bar{X}_2)$

$y_i = (Y_i - \bar{Y})$

$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X}_1 - b_2 \bar{X}_2$ ➡ b_0 adalah intersep atau nilai Y bila X_1 dan X_2 sama dengan nol.

Hasil estimasi: $\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$

Contoh: Pada usahatani sayuran, diduga produksi (Y) yang diperoleh petani dipengaruhi oleh oleh lama pengalaman berusahatani (X_1) dan jumlah curahan tenaga kerja (X_2). Dari hasil pengamatan terhadap 12 orang petani, diperoleh data sebagai berikut:

Obs.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X_1	12	16	8	10	12	10	8	18	10	12	14	20
X_2	40	28	32	28	24	20	18	36	34	24	18	22
Y	310	290	300	290	290	216	200	300	320	260	230	270

Dari data diatas (1) rumuskanlah model estimasi regresi linear pengaruh X_1 dan X_2 terhadap Y, (2) Hitung koefisien determinasi, (3) Hitung nilai Statistik F (Uji-F), (4) hitung nilai statistik t (uji-t), dan (5) apakah setiap variabel independen berpengaruh signifikan terhadap Y?

Gunakan Tabel bantu untuk mendapatkan komponen-komponen setiap formula

No.	X_1	X_2	Y	$x_{1i} = (X_{1i} - \bar{X})$	$x_{2i} = (X_{2i} - \bar{X})$	$y_i = (Y_i - \bar{Y})$	x_1^2	x_2^2	$x_1.x_2$	$x_1.y.$	$x_2.y$
1	12	40	310	-0,5	13	37	0,25	169	-6,5	-18,5	481
2	16	28	290	3,5	1	17	12,25	1	3,5	59,5	17
3	8	32	300	-4,5	5	27	20,25	25	-22,5	-121,5	135
4	10	28	290	-2,5	1	17	6,25	1	-2,5	-42,5	17
5	12	24	290	-0,5	-3	17	0,25	9	1,5	-8,5	-51
6	10	20	216	-2,5	-7	-57	6,25	49	17,5	142,5	399
7	8	18	200	-4,5	-9	-73	20,25	81	40,5	328,5	657
8	18	36	300	5,5	9	27	30,25	81	49,5	148,5	243
9	10	34	320	-2,5	7	47	6,25	49	-17,5	-117,5	329
10	12	24	260	-0,5	-3	-13	0,25	9	1,5	6,5	39
11	14	18	230	1,5	-9	-43	2,25	81	-13,5	-64,5	387
12	20	22	270	7,5	-5	-3	56,25	25	-37,5	-22,5	15
Jumlah (Σ)	**150**	**324**	**3.276**	**0**	**0**	**0**	**161,00**	**580**	**14,0**	**290,0**	**2668**
Rata-rata	**12,5**	**27,0**	**273,0**								

Cara lain yang dapat digunakan untuk menghitung Σx_1^2, Σx_2^2, $\Sigma x_1 y$, $\Sigma x_2 y$, dan $\Sigma x_1 x_2$ menggunakan data pengamatan dengan tabel bantu dan formula sebagai berikut:

$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - \frac{(\sum X_1)^2}{n} = 2.036 - 150^2/12 = \mathbf{161}$$

$$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - \frac{(\sum X_2)^2}{n} = 9.328 - 324^2/12 = \mathbf{580}$$

$$\sum x_1 x_2 = \sum X_1 X_2 - \frac{(\sum X_1)(\sum X_2)}{n} = 4.064 - (150)(324)/12 = \mathbf{14}$$

$$\sum x_1 y = \sum X_1 Y - \frac{(\sum X_1)(\sum Y)}{n} = 41.240 - (150)(3.276)/12 = \mathbf{290}$$

$$\sum x_2 y = \sum X_2 Y - \frac{(\sum X_2)(\sum Y)}{n} = 91.120 - (324)(3.276)/12 = \mathbf{2.668}$$

n = jumlah data (observas) = 12

No.	X_1	X_2	Y	X_1^2	X_2^2	$X_1.X_2$	$X_1.Y$	$X_2.Y$
1	12	40	310	144	1600	480	3.720	12.400
2	16	28	290	256	784	448	4.640	8.120
3	8	32	300	64	1024	256	2.400	9.600
4	10	28	290	100	784	280	2.900	8.120
5	12	24	290	144	576	288	3.480	6.960
6	10	20	216	100	400	200	2.160	4.320
7	8	18	200	64	324	144	1.600	3.600
8	18	36	300	324	1296	648	5.400	10.800
9	10	34	320	100	1156	340	3.200	10.880
10	12	24	260	144	576	288	3.120	6.240
11	14	18	230	196	324	252	3.220	4.140
12	20	22	270	400	484	440	5.400	5.940
Jumlah (∑)	**150**	**324**	**3.276**	**2.036**	**9.328**	**4.064**	**41.240**	**91.120**

Hitung b_0, b_1 dan b_2 dengan formula sbb:

$$b_1 = \frac{(\Sigma y_i\, x_{1i})\,(\Sigma x_{2i}^2) - (\Sigma y_i\, x_{2i})\,(\Sigma x_{1i}\, x_{2i})}{(\Sigma x_{1i}^2)\,(\Sigma x_{2i}^2) - (\Sigma x_{1i}\, x_{2i})^2} = \frac{(290)(580) - (2668)(14)}{(161)(580) - (14)^2} = \frac{130.848}{93.184} = \mathbf{1{,}404}$$

$$b_2 = \frac{(\Sigma y_i\, x_{2i})\,(\Sigma x_{1i}^2) - (\Sigma y_i\, x_{1i})\,(\Sigma x_{1i}\, x_{2i})}{(\Sigma x_{1i}^2)\,(\Sigma x_{2i}^2) - (\Sigma x_{1i}\, x_{2i})^2} = \frac{(2762)(612) - (566)(52)}{(161)(580) - (14)^2} = \frac{425.488}{93.184} = \mathbf{4{,}566}$$

$$b_0 = \overline{Y} - b_1 \overline{X}_1 - b_2 \overline{X}_2 = 273 - 1{,}404\,(12{,}50) - 4{,}566\,(27) = \mathbf{132{,}163}$$

Persamaan estimasi yang diperoleh:

$$\hat{Y}_i = 132{,}163 + 1{,}404\, X_1 + 4{,}566\, X_2$$

Evaluasi Model

Koefisien Determinasi

$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\Sigma(Y_i - \bar{Y})^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{3.918}{16.508} = 0{,}763$$

Uji Simultan (Uji-F)

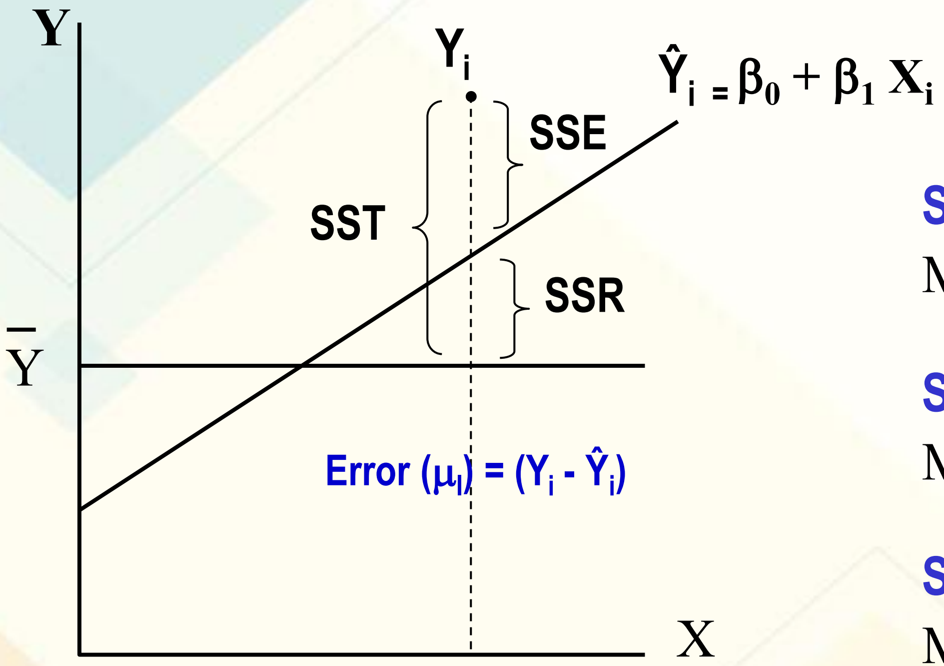
$$F = \frac{SSR / k}{SSE / (n-k-1)}$$

$$F = \frac{12.590 / 2}{3.918 / (12-2-1)} = 14{,}458$$

$\hat{Y}_i = 132{,}1628 + 1{,}4042\, X_1 + 4{,}5661\, X_2$

Obs.	X_{1i}	X_{2i}	Y_i	$\hat{Y}$	$y_i = (Y_i - \bar{Y})$	SST $= (Y_i - \bar{Y})^2$	SSR $= (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$	SSE $\mu^2 = (Y_i - \hat{Y}_i)^2$
1	12	40	310	332	37	1.369	3.441	469
2	16	28	290	282	17	289	90	57
3	8	32	300	290	27	729	273	110
4	10	28	290	274	17	289	1	254
5	12	24	290	259	17	289	207	986
6	10	20	216	238	-57	3.249	1.258	463
7	8	18	200	226	-73	5.329	2.248	655
8	18	36	300	322	27	729	2.383	476
9	10	34	320	301	47	2.209	810	344
10	12	24	260	259	-13	169	207	2
11	14	18	230	234	-43	1.849	1.520	16
12	20	22	270	261	-3	9	151	86
Jumlah (∑)	150	324	3.276		-	**16.508**	**12.590**	**3.918**
Rata-rata	**12,50**	**27,0**	**273,0**					

Zulkifli Alamsyah



SST = Sum of Squares Total = $\sum(Y_i - \bar{Y})^2$

Mengukur total variasi Y dari rata-ratanya

SSR = Sum of Squares Regression = $\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$

Mengukur variasi yang dapat dijelaskan oleh model regresi

SSE = Sum of Squares Error = $\sum \mu_i^2 = \sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2$

Mengukur variasi yang tidak dapat dijelaskan oleh model (error)

$$F = \frac{SSR/k}{SSE/(n-k-1)} = \frac{MSR}{MSE}$$

SST = SSR + SSE

Penjelasan lengkap tentang SST, SSR dan SSE

SST = Sum of Squares Total = $\sum(Y_i - \bar{Y})^2$

- Adalah jumlah kuadrat selisih antara variabel dependen yang diamati (Y) dan nilai rata-rata variabel tersebut ($\bar{Y}$). Sering juga disebut *the **Total Sum of Squares*** (TSS).
- Dapat pula diartikan sebagai penyebaran variabel yang diamati di sekitar rata-rata.
- Mengukur total variabilitas dalam variabel dependen, termasuk bagian variabilitas yang dijelaskan dan yang tidak dijelaskan oleh model regresi.
- SST tidak bergantung pada model regresi; hanya bergantung pada nilai Y yang diamati dan nilai rata-rata Y.

SSR = Sum of Squares Regression = $\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$

- Adalah jumlah kuadrat selisih antara nilai variabel dependen yang diprediksi oleh model regresi untuk setiap titik data variabel independen ($\hat{Y}$) dan nilai rata-rata variabel ($\bar{Y}$)
- Menjelaskan bagian dari total variabilitas dalam variabel dependen yang dijelaskan oleh model regresi. Sering juga disebut ***Explained Sum of Squares***.

SSE = Sum of Squares Error = $\sum \mu_i^2 = \sum(Y - \hat{Y})^2$

- Adalah jumlah kuadrat selisih antara nilai rata-rata variabel (Y) dan nilai variabel dependen yang diprediksi oleh model regresi untuk setiap titik data variabel independen (Ŷ)
- Mengukur perbedaan antara nilai aktual dan nilai prediksi dari variabel dependen.
- Sering juga disebut ***Residual Sum of Squares*** atau ***Unexplained Sum of Squares.***
- mencerminkan variabilitas yang tidak dijelaskan, yaitu bagian dari total variabilitas dalam variabel dependen yang tidak dapat dijelaskan oleh model regresi

Uji Parsal t

$$t = \frac{b_i}{SE(b_i)}$$

$$SE(\beta_i) = \sqrt{VAR(\beta_i)}$$

Utk i = 0, 1, 2.

$$\mathbf{Var}(\hat{b}_0) = \boxed{\sigma^2}\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}_1{}^2\sum x_2{}^2 + \bar{X}_2{}^2\sum x_1{}^2 - 2\bar{X}_1\bar{X}_2\sum x_1x_2}{\sum x_1{}^2\sum x_2{}^2 - (\sum x_1x_2)^2}\right]$$

$$\mathbf{Var}(\hat{b}_1) = \sigma^2\left[\frac{\sum x_2{}^2}{\sum x_1{}^2\sum x_2{}^2 - (\sum x_1x_2)^2}\right]$$

$$\mathbf{Var}(\hat{b}_2) = \sigma^2\left[\frac{\sum x_1{}^2}{\sum x_1{}^2\sum x_2{}^2 - (\sum x_1x_2)^2}\right]$$

Dimana:

$$\sigma^2 = \frac{\boxed{\Sigma\mu_i^2}}{n-k-1}$$

$$\Sigma\mu_i^2 = \Sigma y_i^2 - b_1\,\Sigma y_i\,x_{1i} - b_2\,\Sigma y_i\,x_{2i}$$

atau $\Sigma\mu_i^2$ = SSE

$$\sigma^2 = \frac{3.918}{(12-2-1)} = 435{,}4$$

Uji Parsial t

$\bar{X}_1 = 12{,}5$
$\bar{X}_2 = 27$
$\bar{Y} = 273$
$\Sigma x_1^2 = 161$
$\Sigma x_2^2 = 580$
$\Sigma x_1 x_2 = 14$
$\Sigma x_1 y = 290$
$\Sigma x_2 y = 2.668$

n = 12

$$\mathrm{Var}(b_0) = 435{,}4 \left[\frac{1}{12} + \frac{(12{,}5)^2(580) + (27)^2(161) - 2\,(12{,}5)(27)(14)}{(161)(580) - (14)^2} \right] = \mathbf{963.93}$$

$$\mathrm{Var}(b_1) = 435{,}4 \left[\frac{(580)}{(161)(580) - (14)^2} \right] = \mathbf{2{,}71}$$

$$\mathrm{Var}(b_2) = 435{,}4 \left[\frac{(161)}{(161)(580) - (14)^2} \right] = \mathbf{0{,}75}$$

$SE(b_0) = \sqrt{963{,}93} = 31{,}05$
$SE(b_1) = \sqrt{2{,}71} = 1{,}65$
$SE(b_2) = \sqrt{0{,}75} = 0{,}87$

$b_0 = 132{,}16$
$b_1 = 1{,}40$
$b_2 = 4{,}57$

$$t = \frac{b_i}{SE(b_i)}$$

Nilai t untuk:

Konstanta : $t = 132{,}163 / 31{,}05 = 4{,}26$
X1 : $t = 1{,}404 / 1{,}65 = 0{,}85$
X2 : $t = 4{,}566 / 0{,}87 = 5{,}26$

t- tabel(9; 0,05) = 1,833

HASIL ESTIMASI MODEL REGRESSI LINIER BERGANDA MENGGUNAKAN SPSS

Koefisien Determinasi

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.873[a]	.763	.710	20.866

a. Predictors: (Constant), Tenaga Kerja, Pengalaman

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{3.918}{16.508} = \boxed{0{,}763}$$

Uji Simultan (Uji-F)

ANOVA[a]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1 (SSR)	Regression	12589.585	2	6294.793	14.458	.002[b]
(SSE)	Residual	3918.415	9	435.379		
(SST)	Total	16508.000	11			

a. Dependent Variable: Produksi

b. Predictors: (Constant), Tenaga Kerja, Pengalaman

$$F = \frac{MSR}{MSE} = \frac{6.294{,}793}{435{,}39} = \boxed{14{,}458}$$

Zulkifli Alamsyah

Uji Parsal t

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	132.163	31.047		4.257	.002
	Pengalaman	1.404	1.646	.139	.853	.416
	Tenaga Kerja	4.566	.867	.856	5.265	.001

a. Dependent Variable: Produksi

$$t = \frac{b_i}{SE(b_i)}$$

<u>Nilai t untuk:</u>

Konstanta : $t = 132{,}163 / 31{,}05 = 4{,}26$

X1 : $t = 1{,}404 / 1{,}65 = 0{,}85$

X2 : $t = 4{,}566 / 0{,}87 = 5{,}26$

<u>Nilai Sig. → Excel =TDIST(t; df; tail)</u>

Konstanta : = TDIST(4,26; 9; 2) = 0,002

X1 : = TDIST(0,85; 9; 2) = 0,416

X2 : = TDIST(0,526; 9; 2) = 0,001

Zulkifli Alamsyah

Kesimpulan:

1. Hasil evaluasi model menunjukkan bahwa model relatif baik, dimana:
   a. Pengalaman berusahatani dan jumlah curahan tenaga kerja dapat menjelaskan variasi produksi sebesar 76,3%
   b. Hasil uji-F menunjukkan bahwa kedua variabel tersebut secara simultan berpengaruh signifikan terhadap produksi.
2. Berdasakan hasil uji parsial (Uji-t), pengalaman berusahatani tidak menunjukkan pengaruh yang siginifikan terhadap produksi, sedangkan jumlah curahan tenaga kerja berpengaruh sangat signifikan.
3. Setiapkan kenaikan 1 jam curahan tenaga kerja per minggu dapat meningkatkan produksi per minggu sebesar 4,57 kg.

Terima kasih

zalamsyah@unja.ac.id

Jika ada pertanyaan terkait materi yang disampaikan, dapat diajukan melalui kanal yang tersedia atau melalui forum diskusi pada setiap jadwal kuliah